数理解析研究所講究録 1254 巻 2002 年 23-31



# 汎関数の近似理論の適用によるリプシッツ連続な最小化関数の構成

日本大学文理学部数学科　山浦 義彦 (Yoshihiko Yamaura)
Department of Mathematics, College of Humanities & Sciences,
Nihon Univ.

**Introduction** オルトとキャファレリによって変分問題として定式化されたタイプの自由境界問題に対して, リプシッツ連続な最小化関数を構成する.

第 1 部では, オルトとキャファレリによって扱われた自由境界問題についての正則性の議論 ([1]) の概略を述べ, 最小化関数に対して成り立つリプシッツ連続性という正則性が, いかに本質的役割を果たすかについて説明する.

第 2 部に於いて, 今回の発表における主要結果である「汎関数の近似理論 "Γ-収束"の適用によるリプシッツ連続な最小化関数の構成方法」([9]) について述べる.

## 第 1 部. オルトとキャファレリによる自由境界問題と正則性議論のあらすじ

平面内の領域 $\Omega$ の中で, 2 つの互いに混ざり合わない理想流体の定常状態を考える. 一方の流体が止まっているとみなせるとき, 流体の流れ関数 $u:\Omega\to\mathbf{R}$ が次の条件をみたすことが知られている:

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in } \Omega(u>0) \overset{\text{def}}{:=} \{x\in\Omega : u(x)>0\} \\ u=0,\ |Du|=1 & \text{on } \partial\Omega(u>0) \overset{\text{def}}{:=} \Omega\cap\partial[\Omega(u>0)] \end{cases}$$

この問題に対して解を構成し, その自由境界 $\partial\Omega(u>0)$ の, $(n-1)$ 次元曲面としての正則性を調べることが目標である. オルトとキャファレリは, [1] に於いて,「変分問題」としての定式化の下で, 最小化関数に対して正則性を証明した: $\Omega$ を $\mathbf{R}^n$ $(n\geqq 2)$ に含まれる, リプシッツ連続な境界をもつ有界領域とする. $\phi_0\in W^{1,2}(\Omega)$ を予め与えられる関数とし, $0\leqq\phi_0\leqq\sup_\Omega\phi_0<+\infty$ in $\Omega$ をみたすとする. このとき, 次の変分問題を考える:

$$\begin{cases} \textit{Minimize the functional} \displaystyle\int_\Omega\Big(|Du|^2+\chi_{u>0}\Big)d\mathcal{L}^n \\ \textit{among all functions}\ \ u\in W^{1,2}(\Omega) \text{ with } u=\phi_0 \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

ただし, $\chi_{u>0}$ は, $u(x)>0$ なる $x$ に対して 1, それ以外の点に対して 0 を与える特性関数である.

解が, 領域内に生じ得る特異性 – 自由境界 –を有するというこの問題の特性上, 求める解を 1 つの偏微分方程式の解として捉えることは出来ない. 一方, 上の定式化は, 解を "エネルギー最小性" という特徴づけをもつ, 変分問題の最小化関数として扱えることを主張している. これは自由境界の正則性を調べる上で, 大きな利点となる.

### Section 1. 最小化関数の存在とヘルダー連続性

エネルギー汎関数に特性関数項という特異関数が含まれるため, 自由境界をもつような最小化関数が存在し得ることになる. 実際, その特異性のため, 正則な汎関数の場合と

異なり, 領域全体に於いて第1変分の計算によるオイラー・ラグランジュ方程式を求めることができない. 一方, 特性関数は以下に列挙する性質を導く上では, 都合の良い性質を持っていると言える: 本質を見やすくするため, $\chi_{u>0}(x) = \chi \circ u(x)$ のように, 合成関数として表す. ただし, $\chi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は, $\chi = 0$ if $t \leqq 0$; $= 1$ if $t > 0$ なる関数である.

- **最小化関数の存在** ... $\chi$ の有界性より, 変分法の直接法によって, $L^\infty(\Omega)$ に於ける weakly $*$ 位相に関してのコンパクト性が保証され, 最小化関数の存在が証明される.
- **最大値原理** ... $\chi = \chi(t)$ は高々1点 $t = 0$ を除いて定数関数であことから, $\max(u, 0)$ および $\min(u, \sup_\Omega \phi_0)$ を比較関数として, エネルギー最小性を用いた計算によって, 最大値原理 $0 \leqq u \leqq \sup_\Omega \phi_0$ in $\Omega$ が証明できる.
- **ヘルダー連続性** ... $\chi$ は有界関数である. このことより, 最小化関数がデジオルジ $\mathcal{B}_2$-関数族に属することが証明され, よく知られた埋蔵定理によってヘルダー連続であることがわかる.
- **ラドン測度の導入** ... $\chi$ は単調増加関数である. この性質から, 正の変分関数を用いた第1変分の計算が可能となり, 不等式 $\triangle u \geqq 0$ in $\Omega$ に到達する. これは, $u$ が $\Omega$ 全体に於いて弱い意味で劣調和関数であることを意味する. 特に, 自由境界 $\partial\Omega(u > 0)$ 上では, 汎関数 $\zeta \in C_c^1(\Omega) \mapsto -\int_\Omega DuD\zeta d\mathcal{L}^n$ の正値性のおかげで, $\triangle u$ は正値ラドン測度として意味をもつ. これは, 自由境界上に台をもつ測度であり, Section 2 で述べる, 自由境界の可算修正可能性を証明する際の重要な道具となる.

## Section 2. 自由境界の可算修正可能性

自由境界をの正則性を調べるためには, それを, 各点で「法線ベクトル」が存在するような「曲面」として捉える必要がある. この節では自由境界が, 幾何学的測度論に於いて扱われる "$(n-1)$-次元可算修正可能集合" であることの証明の概略を述べる.

$\chi$ の単調増加性とエネルギー最小性により, 線形汎関数 $\zeta \in C_c^1(\Omega) \mapsto -\int_\Omega DuD\zeta d\mathcal{L}^n$ は正値であることがわかる. 従って, ラドン測度に関するリースの表現定理により, $\Omega$ 上で定義される正値ラドン測度 $\Gamma_u$ が存在して, 次の表現公式が成り立つ:

$$\int_\Omega \varphi d\Gamma_u = -\int_\Omega DuD\varphi d\mathcal{L}^n \quad \text{for any } \varphi \in C_c^1(\Omega)$$

ただし, 正値ラドン測度とは, $\Omega$ に含まれるボレル集合族上の局所有界な測度の完備化のことである. ここで, もっとも重要なことは, 測度の局所有界性であるが, これは汎関数の正値性, ひいては, $u$ のエネルギー最小性が本質的であることに注意する.

さて, ラドン測度 $\Gamma_u$ の台は, 自由境界に含まれることは直ちにわかる. そこで, この測度を, 自由境界の解析の手がかりとしようというのが, 概略である. まず, 自由境界が十分滑らかであると仮定して, 測度 $\Gamma_u$ がいかなる量を意味する測度であるかを計算してみる: 簡単のため, $B_\rho(0) \subset \Omega$ とする. 表現公式の試験関数 $\varphi$ に, $B_{\rho-\delta}(0)$ に於いて恒等的に1をとるような軸対称, リプシッツ連続な関数を代入し, $\delta \downarrow 0$ とすることによって,

$$\int_{B_\rho(0)} d\Gamma_u = \int_{\partial B_\rho(0)(u>0)} \left\langle Du, \frac{x}{|x|} \right\rangle d\mathcal{H}^{n-1}$$
$$= \int_{B_\rho(0)(u>0)} \triangle u d\mathcal{L}^n + \int_{\partial B_\rho(0)(u>0)} \langle Du, -\nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{(Gauss-Green の公式)}$$

ここで, $\Omega(u>0)$ に於いては, $\triangle u = 0$ であることより, 最後の辺の第 1 項は消去される. 従って, 第 2 項の意味を考えれば,

(自由境界の面積) $\times$ (自由境界上でのグラフの立ち上がり傾き) $< +\infty$

ということが従う. このことから, 始めに述べたように自由境界を, 面積が有限の曲面として扱うためには, 結局, 自由境界上でのグラフの立ち上がりの傾きが真に正となることが十分条件となることがわかる. 実は, エネルギー最小性を用いることで, 次の事実を証明できる:

**非退化評価:** $\quad x_0 \in \partial\Omega(u>0) \quad \Rightarrow \quad \fint_{\partial B_\rho(x_0)} u d\mathcal{L}^n \geqq \exists c\rho$

ここで, 特に次のことに注意する: 特性関数の特異性により, 第 1 変分が計算できないことは上で述べたとおりであるが, 実は, 定義域の変数についての変分は計算することができる. 実際,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\partial\Omega(u>\delta)} \left(1 - |Du|^2\right) \langle \eta, \nu_\delta \rangle d\mathcal{H}^{n-1} = 0 \quad \text{for any } \eta \in C_c^\infty(\Omega, \mathbf{R}^n)$$

が成り立つ. この事実から, 全てが滑らかであれば, 自由境界上での最小化関数 $u$ のグラフの傾きは, 1 であることがわかる. こうして, 上で述べた非退化評価に於いて, 右辺の $\rho$ のオーダは 1 より小さくとることができないのである.

これで, 自由境界上でのグラフの立ち上がりの傾きが真に正となることを主張する評価が分かったので, 実際の計算をみてみる: 簡単のため, $0 \in \partial\Omega(u>0)$ とする. $v \in W^{1,2}(B_\rho(0))$ を, $v = u$ on $\partial B_\rho$ なる調和関数とし, ラドン測度の表現公式に於ける試験関数に $\varphi = v - u$ を代入する:

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho} (v-u) d\Gamma_u &= \int_{B_\rho} -DuD(v-u) d\mathcal{L}^n \\ &= \int_{B_\rho} |D(v-u)|^2 d\mathcal{L}^n \qquad (\triangle v = 0) \qquad (1) \\ &\geqq \frac{C}{\rho^2} \int_{B_\rho} |v-u|^2 d\mathcal{L}^n \qquad \text{(ポアンカレの不等式)} \end{aligned}$$

実は, 最小化関数のリプシッツ評価:

**リプシッツ評価:** $\quad B_\rho(x_0) \cap \partial\Omega(u>0) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \fint_{\partial B_\rho(x_0)} u d\mathcal{L}^n \leqq \exists C\rho$

が示される. この評価は, $B_\rho = B_\rho(0)$ の境界で $u$ と値が一致する調和関数を $v$ とするとき, $\int_{B_\rho} |Du|^2 - \int_{B_\rho} |Dv|^2$ なる量 (これが 非負であることは, $v$ のとり方から直ちに従う) を正の値 $\mathcal{L}^n(B_\rho(u=0))$ の定数倍によって下から評価することによって証明される.

非退化評価およびリプシッツ評価を用いて, (1) の両辺の $(u-v)$ を評価する:

∘ $(v-u)$ の上からの一様評価: 最大値原理, $u$ のリプシッツ連続性, $u(0)=0$ であることより,

$$(v-u)(x) \leqq \sup_{B_\rho} v \leqq \sup_{\partial B_\rho} u \leqq C\rho \quad \text{for } x \in B_\rho$$

∘ $(v-u)$ の下からの一様評価: 調和関数についての, ポアッソン積分表示を思い出せば, $\xi \in B_{\theta\rho}(x_0)$ に対して

$$v(\xi) = \frac{\rho^2 - |\xi|^2}{n\omega_n\rho} \int_{\partial B_\rho} \frac{u(\tau)}{|\xi-\tau|^n} d\mathcal{H}^{n-1}(\tau) \geqq \left(1 - \tfrac{|\xi|}{\rho}\right) \fint_{\partial B_\rho} u d\mathcal{H}^{n-1}$$

従って, $u$ のリプシッツ連続性と非退化評価を用いれば,

$$\begin{aligned} (v-u)(\xi) &\geqq (1 - \tfrac{|\xi|}{\rho}) \fint_{\partial B_\rho} u d\mathcal{H}^{n-1} - C\theta\rho \\ &\geqq \fint_{\partial B_\rho} u d\mathcal{H}^{n-1} - C'\theta\rho \geqq c'\rho - C'\theta\rho \end{aligned}$$

$\theta$ を十分小さい正数とすることで, $(v-u)$ の下からの $\rho^1$ オーダー一様評価を得る. こうして, (1) より

$$c\rho^{n-1} \leqq \int_{B_\rho(x_0)} d\Gamma_u \quad \text{for any } x_0 \in \partial\Omega(u>0) \tag{2}$$

を得る. ここで, (2) を得るために, リプシッツ評価が本質的であったことに注意する. 実際, リプシッツ評価のオーダが非退化評価のそれと同じでなければ, 上記の議論は成り立たないが, 上で述べた通り, 後者のオーダは 1 が期待できる最高の値であったため, 傾きのオーダにも 1, すなわち, 関数としてリプシッツ連続性が要求されるのである.

ラドン測度の有界性から, 被覆定理を用いて, (2) より

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega(u>0)) < +\infty$$

に到達する. これは, よく知られた, "カチオポリ集合"であるための判定条件である. この結果, $\Omega(u>0)$ が, カチオポリ集合であることが示されたことになる. すなわち, ベクトル値ラドン測度 $D\chi_{u>0}$ が存在して, 次の一般化された発散定理が成り立つ:

$$\int_{B_\rho} \chi_{u>0} \mathrm{div} g d\mathcal{L}^n = -\int_{B_\rho} \langle g, D\chi_{u>0} \rangle$$

幾何学的測度論の一般論により, カチオポリ集合の境界で, ベクトル値ラドン測度 $D\chi_{u>0}$ のルベーグ点に於いては, 近似単位法線ベクトルが存在することが知られている. 特に, $u$ のエネルギー最小性を用いた議論から, このようなルベーグ点は $\partial\Omega(u>0)$ の $\mathcal{H}^{n-1}$

に関してほとんどすべての点であることがわかる. こうして, 自由境界は, その面積を測る測度が $(n-1)$ 次元ハウスドルフ測度 $\mathcal{H}^{n-1}$ であり, そのほとんどいたるところで, 近似の意味で, 単位法線ベクトルが存在するような $(n-1)$ 次元可算修正可能集合であることがわかる.

[1] では, さらにこの結果をより強い結果:「$C^{1,\beta}$-級の超曲面である」という主張まで上げている.

## 第 2 部. 汎関数近似によるリプシッツ連続な最小化関数の構成

第 1 部により, リプシッツ連続な最小化関数の存在を示すことは, 自由境界の正則性を示す上で本質的に有意義であることがわかった. そこで, Γ-収束の理論を適用することによって, 構成的にリプシッツ連続な最小化関数の存在を証明しようというのが目標である.

### Section 1. 主要定理と既存の結果との関係

問題設定から述べる: $a^{ij} \in C^\infty(\mathbf{R})$ with $a^{ij} = a^{ji}$ in $\mathbf{R}$ とし, 一様強楕円条件をみたすとする. また, 証明の技術的理由から, 一階微分の正値性を必要とする: $0 \leqq \dot{a}^{ij}(t)\xi_i\xi_j$ $\forall t \in \mathbf{R}, \forall \xi \in \mathbf{R}^n$. このとき, 次の変分問題を考える:

$$(P)\begin{cases} \textit{Minimize the functional } \displaystyle\int_\Omega \Big(a^{ij}(u)D_iuD_ju + \chi_{u>0}\Big)dx \\ \textit{among all } u \in W^{1,2}(\Omega) \text{ with } u = \phi_0 \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

主要定理は次の通りである.

**主要定理:** 変分問題 $(P)$ は少なくとも 1 つのリプシッツ連続な最小化関数を有する.

特に 2 次元の場合この問題は, ゴム膜を剥がす問題の数学モデルと考えられる ([8]).

このタイプの非線形自由境界問題は, 領域の次元が 2 の場合に限って, [7], [8] に於いて研究されており, そこでは, 上記の結果より強く, [1] の結果と同等の結果を出している. つまり, 最小化関数は全てリプシッツ連続関数である, という正則性の結果を導いている. その証明方法は, 線形問題の [1] の手法のアナロジーであるが, 技術的に 2 次元の特殊性を必要とするため, 直接その結果を直接 3 次元以上に上げることは難しい. 一方, ひとたび最小化関数のリプシッツ連続性が証明できれば, 自由境界の正則性は, [1] の手法のアナロジーをとることができる. 実際, ここで扱う非線形問題に特有な 2 次非線形項 $\dot{a}^{ij}(u)D_iuD_ju$ は定数項として扱え, また, ブローアップの手法の適用の際には, この非線形項は, 0 に収束するため, 無視して扱うことが出来るためである.

これに対して, ここでは, 任意に与えられたディィリクレ条件をみたすリプシッツ連続な最小化関数を**少なくとも 1 つ見つけることできる**ことを主張する.

### Section 2. 証明方法と参考論文

近似エネルギー汎関数を定義する. $\chi_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を $\chi_1(t) = 0$ if $t \leqq 0$; $= 1$ if $t \geqq 1$, $0 \leqq \chi_1 \leqq 1$ in $\mathbf{R}$ なる $C^1$-級関数とし, 正数 $\varepsilon$ に対して $\chi_\varepsilon(t) = \chi_1(\frac{t}{\varepsilon})$ $(t \in \mathbf{R})$ と定義す

る. $\mathcal{K} \equiv \{u \in W^{1,2}(\Omega) : 0 \leqq u \leqq \sup \phi_0, u = \phi_0 \text{ on } \partial\Omega\}$ とおくとき, $L^2(\Omega)$ 上の, $+\infty$ の値も許す汎関数を次によって定義する:

$$J(u) = \begin{cases} \int_\Omega \Big(a^{ij}(u) D_i u D_j u + \chi(u)\Big) & \text{if } u \in \mathcal{K} \\ +\infty & \text{otherwise in } L^2(\Omega) \end{cases}$$

$$J_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_\Omega \Big(a^{ij}(u) D_i u D_j u + \chi_\varepsilon(u)\Big) & \text{if } u \in \mathcal{K} \\ +\infty & \text{otherwise in } L^2(\Omega) \end{cases}$$

と定義する. このとき次の, 汎関数の意味での収束性が証明できる:

$$J_\varepsilon \to J \text{ in the snese of } \Gamma(L^2(\Omega)) \text{ as } \varepsilon \downarrow 0$$

ここで, $\Gamma(L^2(\Omega))$-収束の定義は次の I,II が同時に成り立つことである:

$$\begin{cases} \text{I. } \forall v_\varepsilon \to v \text{ in } L^2(\Omega),\ J(v) \leqq \varliminf_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon) \\ \text{II. } \forall v \in L^2(\Omega), \exists (v_\varepsilon) \subset L^2(\Omega) \quad \text{s.t. } \begin{cases} v_\varepsilon \to v \text{ in } L^2(\Omega) \\ \varlimsup_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon) \leqq J(v) \end{cases} \end{cases}$$

収束性の証明 ([9] 参照) は省略するが, 重要なことは, この収束性から得られる次の事実である:

> **[事実]** $u_\varepsilon$ を近似エネルギー汎関数 $J_\varepsilon$ の最小化関数とする. もしも, 必要があれば部分列を選出することによって $u_\varepsilon$ が $\varepsilon \downarrow 0$ のとき $L^2(\Omega)$-ノルムに関して, ある $L^2(\Omega)$-関数 $u$ に収束するならば, この極限関数 $u$ は, エネルギー汎関数 $J$ の最小化関数である.

この事実の証明は容易である. 実際, $u_\varepsilon \to u$ in $L^2(\Omega)$ とするとき, $v \in L^2(\Omega)$ を任意にとる. $\Gamma$-収束性の II より, $\varlimsup_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon) \leqq J(v) \quad \forall v \in L^2(\Omega)$ をみたす, $v$ に $L^2(\Omega)$-ノルムで収束する $L^2(\Omega)$-関数列 $(v_\varepsilon)$ が存在する. $u_\varepsilon$ のエネルギー最小性から, $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqq J_\varepsilon(v_\varepsilon)$ が成り立つが, $\Gamma$-収束性の I に注意して, 両辺 $\varepsilon \to 0$ とすれば, 不等式 $J(u) \leqq J(v)$ for any $v \in L^2(\Omega)$ が従い, 事実が証明される.

実は, レリッヒのコンパクト性定理を適用することで, 上の事実の仮定が成り立ち, 従って, $J_\varepsilon$ の最小化関数の列の極限関数として, 目的のエネルギー汎関数 $J$ の最小化関数を構成することができるのである.

こうして, 主要定理を証明することは, 一様評価

$$\sup_{\varepsilon > 0} ||Du_\varepsilon||_\infty \leqq C \tag{$\star$}$$

の証明に帰着される.

この証明の概略を述べる前に, ここで, 汎関数の $\Gamma$-収束近似法を用いた最小化関数の構成について, その利点および関連論文についてまとめる.

この証明方法の利点は次の 2 点である:

1° **近似関数列は近似エネルギー汎関数の最小化関数である.** このことにより, Section 1 で述べた特性関数項の性質を引き継げる. 実際, 特性関数の近似関数は, 「有界性」という性質を受け継ぐため, $J$ の最小化関数について証明できるのとまったく同じ理由から, $(u_\varepsilon)$ に対して, 一様なヘルダー連続性を得ることができる.

2° **近似汎関数は微分可能である.** このため, 各近似汎関数 $J_\varepsilon$ の最小化関数 $u_\varepsilon$ に対しては, 第 1 変分をとることによって, 領域全体で成り立つオイラー・ラグランジュ方程式が考えられ, その結果, リプシッツ連続性の証明に於いて本質的な役割を果たす, ハルナックの不等式が成り立つことになる.

$\Gamma$-収束の理論は, デジオルジによってはじめられた. 具体的汎関数をもつ変分問題に対しての適用例として [2], [6] などが知られている. また, この手法は, 近似関数が, 近似汎関数の最小化関数であるという特徴を有するため, 数値解析への応用が可能であるという側面をもつ. 実際, [5], [3] に於いて, それぞれ上で挙げた論文に関する数値解析実験に関する結果が述べられている. 近似関数は, 変分問題の最小化関数であるが, 特に, 偏微分方程式の解になっている. 線形問題の場合に, 方程式の近似という立場から, 一様リプシッツ連続性を求めているのが, [4] である. 下に示す, 近似関数の一様リプシッツ連続性の証明は, [4] を参考にした.

最後に, 一様リプシッツ評価 $(\star)$ の証明概略を述べる: 微分の一様評価を得るために, ハルナックの不等式を必要とする. このため, まず一様ヘルダー連続性を証明する:

**[Step 1] 一様ヘルダー評価** 基本的な方針は, オリジナルの汎関数の最小化関数のヘルダー連続性の証明と同じく, デジオルジの $\mathcal{B}_2$-関数族に対する埋蔵定理の適用による. この際, 滑らか化された特性関数項 $\chi_\varepsilon$ が, $0 \leqq \chi_\varepsilon \leqq 1$ in $\mathbf{R}$ をみたすことにより, $w = \pm u$ が, 任意の $B_\rho \subset \Omega$ およびその同心球 $B_{(1-\sigma)\rho}$ $(0 < \sigma < 1)$ に対して,

$$\int_{B_{(1-\sigma)\rho}(w>k)} |Dw|^2 d\mathcal{L}^n \leqq \gamma \left( \frac{1}{(\sigma\rho)^2} \int_{B_\rho(w>k)} |w-k|^2 d\mathcal{L}^n + 1 \right) |B_\rho(w>k)|$$

をみたすことが証明できる. ここで注意すべきことは, 右辺の係数 $\gamma$ が近似指数 $\varepsilon$ に無関係に決めることができる点である. これにより, $\varepsilon$ に従属しないハルナックの不等式が得られる.

**[Step 2] 微分の一様評価** 領域 $\Omega$ を $A = \Omega(0 \leqq u \leqq \varepsilon)$ および $B = \Omega(u > \varepsilon)$ に分割し, それぞれの領域に於いて, 微分の一様評価を行う.

**<u>領域 A に於いて:</u>** 簡単のため, $0 \in A$ とし, $|Du(0)|$ を評価する. このとき, 仮定より <u>$0 \leqq u(0) \leqq \varepsilon$</u> であることに注意する. $u$ を近似指数 $\varepsilon$ オーダでスケーリングを施す. すなわち, $u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}u(\varepsilon x)$ for $x \in B_1(0)$ とおく. このとき, $u_\varepsilon$ がみたす方程式は次の通りである: $\Omega_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{R}^n : \varepsilon x \in \Omega\}$ とする. 任意の $\zeta \in C_c^1(\Omega_\varepsilon)$ に対して,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left( a^{ij}(\varepsilon u_\varepsilon) D_i u_\varepsilon D_j \zeta + \frac{\varepsilon}{2} \dot{a}^{ij}(\varepsilon u_\varepsilon) D_i u_\varepsilon D_j u_\varepsilon \zeta \right) d\mathcal{L}^n = -\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\varepsilon}{2} \chi_\varepsilon'(\varepsilon u_\varepsilon) \zeta d\mathcal{L}^n$$

アプリオリ評価によって, $||Du_\varepsilon||_{\infty,B_{\frac{1}{8}}(0)}$ は $||u_\varepsilon||_{\infty,B_{\frac{1}{4}}(0)}$ のみに従属する定数で評価されるから, $||u_\varepsilon||_{\infty,B_{\frac{1}{4}}(0)}$ の一様評価を求めればよい. ところが, 十分小さい $\varepsilon$ に対して次のハルナックの不等式が成り立つ:

$$||u_\varepsilon||_{\infty,B_{\frac{1}{4}}(0)} \leqq C \inf_{B_{\frac{1}{4}}(0)} u_\varepsilon + ||\varepsilon\chi'_\varepsilon(\varepsilon u_\varepsilon)||_{\infty,B_1(0)} \tag{3}$$

これは, [Step 1] の一様評価を用いることで, $\varepsilon$ を十分小さくとって2次非線形項を主要項に吸収させることによって証明することができる. (3) の最後の辺の第1項は, $0 \leqq u_\varepsilon(0) \leqq 1$ であることにより, また, 第2項は, $\chi'_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\chi_1(\frac{t}{\varepsilon})$ であることを思い出せば, それぞれ $\varepsilon$ に無関係に一様有界である. こうして, 目的の一様評価に到達する.

<u>**領域 B に於いて**</u>: 簡単のため, $0 \in B$ とする. $\rho := \mathrm{dist}\,(0, A) > 0$ とおき, $v = u - \varepsilon$ とする. このとき, $\rho$ オーダのスケーリングを施す. すなわち, $v_\rho(x) = \frac{1}{\rho}v(\rho x) > 0$ in $B_1(0)$ とおく. このとき, $v_\rho$ がみたす微分方程式は, 次の通りである: $\Omega_\rho \overset{\mathrm{def}}{:=} \{x \in \mathbf{R}^n : \rho x \in \Omega\}$ とするとき, 任意の $\zeta \in C^1_c(\Omega_\rho)$ について,

$$\int_{\Omega_\rho} \Big(a^{ij}(\rho v_\rho + \varepsilon)D_i v_\rho D_j \zeta + \frac{\rho}{2}\dot{a}^{ij}(\rho v_\rho + \varepsilon)D_i v_\rho D_j v_\rho \zeta\Big) d\mathcal{L}^n = 0$$

となる. ここで, 特に $\rho v_\rho + \varepsilon > \varepsilon$ in $B_1(0)$ であることにより, $\chi'_\varepsilon(\rho v_\rho + \varepsilon) = 0$, すなわち, 特性関数項は現れないことに注意する.

アプリオリ評価により, $|Du(0)| = |Dv_\rho(0)|$ は $||v_\rho||_{\infty,B_1(0)} = \frac{1}{\rho}||v||_{\infty,B_\rho(0)}$ にのみ従属する定数によって評価される. ところが,

$$\frac{v(\xi)}{2\rho} \leqq \frac{v(\xi)}{\mathrm{dist}\,(\xi, A)} \quad \text{for } \xi \in B_\rho(0)$$

だから, $\xi = 0$ として, $\frac{v(0)}{\rho}$ の値の評価に帰着される.

第2部のはじめに述べた仮定 $\dot{a}^{ij} \geqq 0$ より,

$$a^{ij}(\rho v_\rho + \varepsilon)D_{ij}v_\rho = -\frac{\rho}{2}\dot{a}^{ij}(u)D_i v_\rho D_j v_\rho \leqq 0 \quad \text{in } B_1(0) \tag{4}$$

が成り立つ. 十分小さい $\rho$ については領域 A に於けるときと同様の理由から, 今度は, 完全な形のハルナック不等式が成り立つから,

$$v_\rho(0) \leqq \sup_{B_{\frac{1}{2}}(0)} v_\rho \leqq C_1 \inf_{B_{\frac{1}{2}}(0)} v_\rho \tag{5}$$

そこで, 比較関数: $\varphi(x) = C_2 v_\rho(0)\Big[e^{-\mu|x|^2} - e^{-\mu}\Big]$ をとり, $\mu$ を十分大きくとることで, (4) より $a^{ij}(\rho v_\rho+\varepsilon)D_{ij}\varphi \geqq a^{ij}(\rho v_\rho+\varepsilon)D_{ij}\varphi v_\rho$. また, $C_2$ を十分小さくとることで, (5) より $\varphi \leqq v_\rho$ in $\partial(B_1 \setminus \overline{B}_{\frac{1}{2}})$ こうして, 比較定理により,

$$\varphi \leqq v_\rho \quad \text{in } B_1(0) \setminus \overline{B}_{\frac{1}{2}}(0)$$

このことから, $z_0 \in A$ を, $\rho = |z_0|$ をみたすようにとるとき,

$$\frac{1}{\rho}v(0) = v_\rho(0) = |D\varphi(z_0)| \leqq |Dv_\rho(z_0)| = |Dv(z_0)| \leqq C_3$$

ただし, 最後の不等式は, $z_0 \in A$ であることより, 既に証明してある 領域 $A$ での微分評価を用いた. □

**References**

[1] Alt, H.W. & L.A.Caffarelli, "*Existence and regularity for a minimum problem with free boundary*", J. Reine Angew. Math., **325** (1981), pp.105-144.

[2] Ambrosio, L. & V.M.Tortorelli, "*On the Approximation of Free Discontinuity Problems*", Bollettino U.M.I.(7) **6-B** (1992), pp.105-123.

[3] Baldo, S. & G.Bellettini, "*Γ-convergence and Numerical Analysis: an Application to the Minimal Partition Problem*", Richerche Math. Vol. **XL**, *fasc.* 1° (1991), pp.33-64.

[4] Berestycki, H. & L.A.Caffarelli & L.Nirenberg, "*Uniform Estimate for Regularisations of Free Boundary Problems*", Publications du Laboratorie D'Analyse Numerique, R**89022** (1989), pp.1-53.

[5] March, R., "*Visual reconstruction with discontinuities using variational methods*", Image and vision computing Vol **10** no **1** (1992), pp.30-38.

[6] Modica, L., "*The Gradient Theory of Phase Transitions and the Minimal Interface Criterion*", Arch. Rat. Mech. Anal. Vol **98** (1987), pp.123-142.

[7] Omata, S., "*A free boundary problem for a quasilinear elliptic equation Part I: Rectifiability of free boundary*", Differential and Integral Equations., **6** No.6 (1993) 1299-1312.

[8] Omata, S. & Y.Yamaura, "*A free boundary problem for quasilinear elliptic equations Part II: $C^{1,\alpha}$-regularity of free boundary*, Funkcialaj Ekvacioj, Bolumo **42**, numero 1 Aprilo (1999) 9-70.

[9] Yamaura, Y., "*A construction of a Lipschitz continuous minimizer of a free boundary problem*, preprint.